



BİTİRME TEZİ POSTER ETKİNLİĞİ

2022-2023 GÜZ

MÜKEMMEL KODLAR VE UYGULAMALARI

ELİF ÇIKMAZ 18025015

MATEMATİK BÖLÜMÜ, YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ, İSTANBUL

KODLAR

Kodlama kuramı, gürültülü bir kanalda verilerin aktarılması ve bu aktarılma sırasında bozulan verilerin (iletilerin) düzeltilmesi ile ilgilidir. Bir C kodundaki iki kod sözcüğü arasındaki en küçük Hamming mesafesi d olsun, $d = \min_{u,v \in C} \left\{ \frac{d}{u,v} \right\}$. Dolayısıyla bir kod sözcüğünü diğerine değiştirmek için en az d bit değişiklik gerekir. C , $d-1$ kadar hataları algılayabilir.

Bir kod üç sayı ile karakterize edilir:

n - orijinal mesaj uzunluğu (bit)

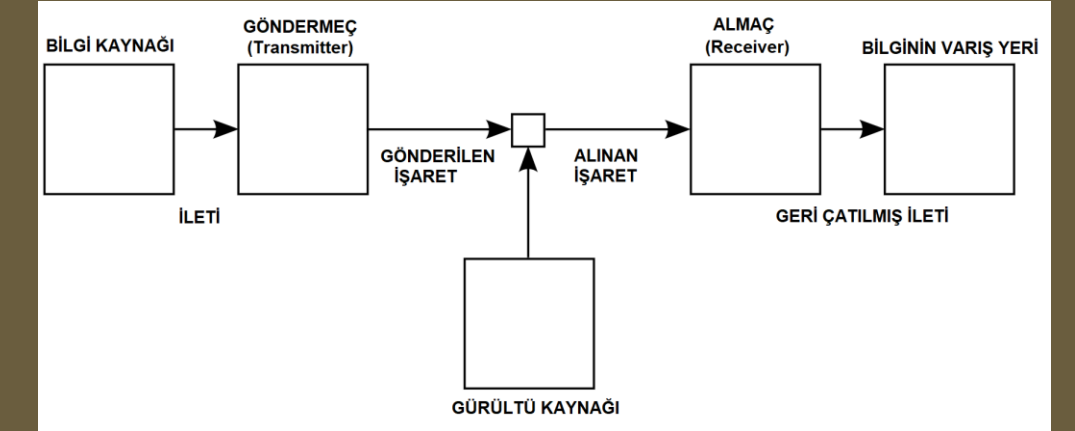
k - kodlamada eklenen bit sayısı

d - kod sözcükleri arasındaki minimum uzaklık

HATA DÜZELTEN KODLAR

Hata düzelten kodlar, mesajlar gürültülü bir kanaldan geçerken oluşan hataları düzeltmek için kullanılır. Orijinal mesajın, eşit boyuta bölünebilen bir dizi bitten oluşsun. Her bloğun uzunluğu n olsun. Olağan süreçte orijinal mesajlar x 'den oluşur. Daha sonra bu kodlar bazı kodlama fonksiyonu tarafından kodlanıp bazı gürültülü kanallara gönderilir. Diğer uçta alınan değer y , bazı $y \in E$ lere karşılık gelen kod çözme aracılığıyla çözülür.

Eğer kanalda hata yoksa; $u=v$ ve $x=y$ 'dir.



LİNEER KODLAR

Sonlu bir F_q cismi verilsin, (x_1, \dots, x_k) k data sembollerini $n \geq k$ $(c_1, \dots, c_k) \in F_q^k$ çözümlenmiş sembolere gönderen bir lineer dönüşüm olsun. F_q uzayında çalıştığımız için, kod sözcüğü F_q^k 'ya yani bir vektör uzayına aittir. Kod çözümü bir lineer dönüşüm olduğundan iki kod sözcüğünün toplamı yine bir kod sözcüğüdür ve iki kod sözcüğünün çarpımı yine bir kod sözcüğünü verir.

Örnek: Verilen $n = 4$ uzunlu F_2 'deki kodların lineer olup olmadıklarını inceleyelim:

$\{(1,0,0,0), (0,1,0,1), (1,1,0,1), (0,0,0,1)\}$.

Çözüm: Bu kod lineer kod olamaz çünkü $(0,0,0,0)$ kodu dahil değildir. Ayrıca $(1,1,0,1) + (0,0,0,1)$ toplamı da koda dahil dahildir.

MÜKEMMEL KODLAR

n uzunluklu t hata düzelten q 'lu bir kod, kod sözcüklerini merkez kabul eden t yarıçaplı küreler üst üste gelmemek koşuluyla F_q^n uzayını dolduruyorsa mükemmel adını alır. Bir q 'lu $(n, M, 2t+1)$ kod

$$M \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} (q-1) + \binom{n}{2} (q-1)^2 + \dots + \binom{n}{t} (q-1)^t \right) \leq q^n$$

Hamming eşitsizliğinde eşitlik hali sağlanıyorsa bu koda mükemmel kod adını alır. Yani q 'lu bir $(n, M, 2t+1)$ kodu

$$M \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} (q-1) + \binom{n}{2} (q-1)^2 + \dots + \binom{n}{t} (q-1)^t \right) = q^n$$

eşitliğini sağlıyorsa bu kod mükemmel koddur.

HAMMING KODLAR

Hamming uzaklığı, aynı uzunluktaki herhangi iki dizinin birbirinden farklı elemanın sayısıdır. $u, v \in (F^n)$ olsun. u ve v vektörleri arasındaki Hamming uzaklığının bulunması için $d(u,v)$ yani u ve v 'nin farklı olduğu yerlerin sayısının bulunması gerekir.

Örnek 1.1. 10100010 ve 10101110 vektörleri arasındaki mesafeyi bulalım.

10100010

10101110

Birbirinden farklı 2 nokta vardır, yani Hamming mesafesi (uzaklığı) $d(10100010, 10101110) = 2$ 'dir. Bu kod değerlerini karşılaştırarak gönderilmek istenen mesajın doğru gönderilmediğini anlayabiliriz.

Johnson Grafikleri

$J(n, k)$ Johnson grafiklerinin vertex seti $V_k^n = \{x \in \{0,1\}^n : k \text{ tane } x\}$. İki köşe x, y olmak üzere, eğer ikisinin $k-1$ tane ortağı varsa ya da buna eşit olarak $d_H(x, y) = 2$ ise x ve y bitişiktir. Dolayısıyla $x, y \in V_k^n$ olmak üzere x ve y arasındaki Johnson mesafesi $d_j(x, y) = \frac{1}{2} d_H(x, y)$ olarak tanımlanır.

Grassman Grafikleri

$G_q(n, k)$ Grassman grafikleri, tüm k -boyutlu $GF(q)^n$ 'nin alt gruplarının vertex setidir. İki altgrup bitişiktir ancak ve ancak $(k-1)$ -boyutlu alt uzayda kesişir. Grassman grafiğindeki çap problemi (kesişimler açısından) Frankl ve Wilson tarafından çözülmüştür.

KAYNAKÇA

- [1] Van Lint, J. H., "A Survey of Perfect Codes", Vol.5, No 2(Spring 1975), Rocky Mountain Mathematics Consortium
- [2] Lemmermeyer, F, "Error-correcting Codes", 16 Şubat 2005
- [3] Boguszak, M, "Error-Correcting Codes", A-Mathematical Introduction by John Baylis, 2005
- [4] Ling Xing, S. C., "Coding Theory A First Course", Cambridge University Press, 2004
- [5] Aydinian, H, "On Perfect Codes and Related Concepts", Desings Codes and Crytography 22(3)
- [6] <https://errorcorrectionzoo.org/list/perfect>